

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 404

Het knipprobleem uit de Staaf- en Draad Walserij,
een besliskundige benadering.

door

J.H. van Frankenhuisen



December 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Doel

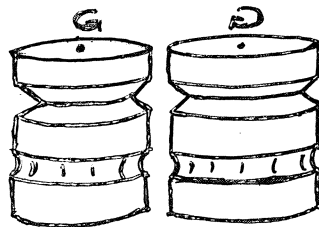
Het doel van dit onderzoek is om de verknipping van uitgewalst materiaal in de staaf- en draadwalserij te optimaliseren. De criteria voor deze optimalisatie zijn machinerendement en materiaalrendement. Bij dit laatste is gezocht naar de knipinstelling, waarvoor de verwachte hoeveelheid schrot per knuppel minimaal is. Het machinerendement is het rendement van de koudschaar, dat gedefinieerd is als de verhouding tussen de werkelijke opbrengst en de opbrengst van een koelbedveld van ∞ - lange staven.

We hebben ons beperkt tot het aangeven van de methode om de optimale knippolitiek te bepalen. Resultaten hebben betrekking op enkele eindprodukten, ieder met een bepaalde handelslengte en metergewicht.

Door het ontbreken van gegevens over kosten is niet gestreefd naar een gecombineerde optimalisatie.

2. De Staaf- en Draad Walserij

In deze walserij worden zgn. "knuppels" uitgewalst tot betonstaal. De knuppels zijn 11 à 12 meter lang met een vierkante doorsnede van 80 bij 80 of 100 bij 100 millimeter. Het knuppelgewicht heeft een kansverdeling, die wij konstant en bekend veronderstellen. Eerst worden de knuppels tot ± 1000 graden opgewarmd in een oven, die een capaciteit van ongeveer 100 ton heeft. Daarna worden ze één voor één uitgestoten en belanden ze in de walsstraat. De walsstraat bestaat uit een aantal groepen walstuigen, die al naar gelang het gewenste eindprodukt op een bepaalde manier ingesteld en achter elkaar geschakeld worden. Alle walsen zijn kaliber walsen: in een band over het oppervlak van de wals is ruimte uitgespaard. Het materiaal wordt door het zo ontstane gat tussen de tegen elkaar draaiende walsen geperst.



Nadat het materiaal gewalst is, belandt het op een koelbed, om af te koelen, alvorens door de zgn. koudschaar op de eigenlijke handelsmaat geknipt te worden.

Een uitgewalste knuppel is echter meestal te lang voor het koelbed. Daarom staat aan het begin van het koelbed een schaar, de "vliegende schaar", die staven van een te kiezen lengte afknipt. Deze lengte heet: "koelbedlengte". Door de uitwalsing is de eindsnelheid van het materiaal in de walsstraat groot, zodat een speciaal remmechanisme er voor moet zorgen dat de staven niet doorglijden op het koelbed. Zeer korte staven echter, hebben een grote kans om dit remmechanisme te ontregelen. De staven moeten dus ook altijd een bepaalde minimale lengte hebben. Op het koelbed worden de staven aan één kant gelijk gericht, en vervolgens verknipt bij de koudschaar. Deze kan N staven (afhankelijk van de staafdikte) tegelijk knippen.

Eerst wordt een kopje van alle staven afgeknipt. Daarna worden de staven over een afstand L onder het mes doorgeschoven, wordt weer geknipt enz. Aan het eind van de staven moet, evenals in het begin een stukje weggeknipt worden, omdat het materiaal daar vervormd is.

Stukken die korter zijn dan een gehele handelslengte worden apart gehouden en ofwel verschrot ofwel later, op een tijdstip dat de walsen stilstaan, verknijpt tot zgn. "onderlengtes".

De gehele handelslengtes zelf worden verder getransporteerd, gebundeld en opgeslagen in de voorraad.

3. Verwachte hoeveelheid afval per knuppel.

We gaan uit van een gegeven knuppelgewichtsverdeling. Door een schaalvermenigvuldiging volgt hieruit de kansverdeling van de uitgewalste knuppel lengte voor een bepaald eindprodukt. Zij $F(l)$ de verdelingsfunctie van deze uitgewalste lengte.

De verknipping van de uitgewalste lengte l geschiedt in twee stappen. Door de vliegende schaar wordt l in staven geknipt, waarna een aantal van deze staven tegelijk in een zogenaamd koelbedveld in handelslengten en onderlengtes geknipt wordt.

De knipwerking van de vliegende schaar wordt geregeld door fotocellen en kan als volgt worden omschreven:

-Zij k de koelbedlengte instelling.

-Zij a het aantal uitgewalste meters dat de 2e rest fotocel voor de vliegende schaar staat.

-Zij b de idem plaatsing achter de vliegende schaar van de "60 meter" fotocel.

Wanneer

$$(3.1) \quad l \in (nk + a, (n+1)k + a),$$

worden uit l precies n gehele koelbed lengten k geknipt. Het reststuk $l-nk$ wordt bovendien nog in stukken van lengte a en $l-nk-a$ geknipt wanneer:

$$l \in (nk + a + b, (n+1)k + a)$$

Samenvattend:

$$(3.2) \quad \begin{array}{ll} l \in (nk + a, nk + a + b) & n \text{ stukken } k, 1 \text{ stuk } l-nk \\ l \in (nk + a + b, (n+1)k + a) & n \text{ stukken } k, 1 \text{ stuk } a, 1 \text{ stuk } l-nk-a. \end{array}$$

De instelling van k en de keuze van a en b bepalen dus volledig de knipwerking van de vliegende schaar.

De stukken op het koelbed worden ter verknipping aan de koudschaar aangeboden. De opbrengst van een staaf ter lengte l bij de koudschaar is afhankelijk van de handelslengte en eventuele onderlengte.

Zij k de handelslengte en s de onderlengte. (we rekenen met een vaste onderlengte, later helemaal zonder onderlengte).

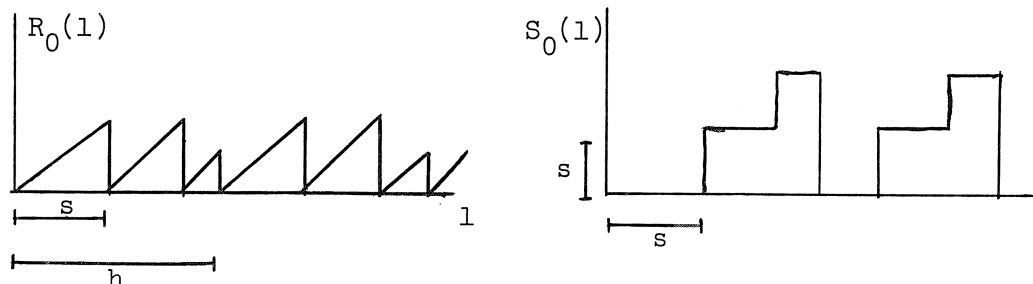
De verknipping geschiedt aldus: aan de uiteinden wordt een stukje van totale lengte r afgeknipt en uit de rest worden zoveel mogelijk gehele handelslengtes geknipt. Uit het restant worden dan, indien er ook onderlengtes geknipt worden, nog zoveel mogelijk gehele stukken s gehaald.

We definiëren nu de functies $R_r(l)$ en $S_r(l)$:

$R_r(l)$ is de hoeveelheid afval in lengte eenheden van een stuk ter lengte l , dat bij de koudschaar verknipt wordt, bij vaste top-en voetknip van lengte r .

$S_r(l)$ is de totale hoeveelheid onderlengtes die daarbij ontstaat.

$R_r(l)$ is een zaagtandfunctie en $S_r(l)$ een trapfunctie:

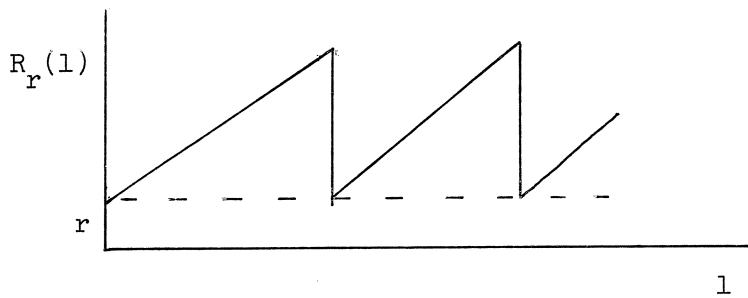


Er geldt:

$$\begin{aligned} R_r(l) &= R_0(l-r)+r \\ (3.3) \quad S_r(l) &= S_0(l-r) \end{aligned}$$

R_0 en S_0 zijn continu van rechts. De functies R_r en S_r zijn dus ook continu van rechts en alleen afhankelijk van h, s en r , die vast zijn. Uit dit laatste volgt dan dat de verknipping van een knuppel door warm- en koudschaar geheel bepaald wordt door de instelling van k en de keuze van a, b en r .

In het vervolg zullen we niet met onderlengtes rekenen. De functie $R_r(l)$ is dan een regelmatige zaagtandfunctie.



De verwachte hoeveelheid afval die op het interval $[nk+a, (n+1)k+a)$ geboekt wordt, bedraagt (zie 3.2):

$$(3.4) \quad A(n, k, a, b) = \int_{nk+a}^{nk+a+b} [nR_r(k) + R_r(1-nk)] dF(1) + \\ + \int_{nk+a+b}^{(n+1)k+a} [nR_r(k) + R_r(a) + R_r(1-nk-a)] dF(1)$$

Sommatie over n levert de verwachte hoeveelheid afval per uitgewalste lengte (= per knuppel):

$$(3.5) \quad f(k, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n, k, a, b)$$

Indien men ook met onderlengtes wenst te rekenen, levert een soortgelijke uitdrukking de verwachte lengte aan onderlengtes per knuppels. Deze sommaties zijn in feite eindig, omdat de uitgewalste lengte waarden aanneemt in een eindig interval.

De funktie $f(k, a, b)$ is continu in b en stuksgewijs continu in k en a . Diskontinuiteiten treden op in die punten, waarin de funkties $R_r(a)$ en $R_r(k)$ discontinu zijn, dus voor $a \equiv r \pmod{h}$ en $k \equiv r \pmod{h}$.

Immers:

$$\begin{aligned}
 f(k+, a, b) - f(k-, a, b) &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} [f(k + \varepsilon_1, a, b) - f(k - \varepsilon_2, a, b)] = \\
 &= [R_r(k+) - R_r(k-)] \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)k+a}_{nk+a} \quad ndF(1) = \\
 (3.6) &= \begin{cases} -h \sum_{n=1}^{\infty} F(nk + a) & \text{als } k \equiv r \pmod{h} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Evenzo geldt:

$$(3.7) \quad f(k, a+, b)f(k, a-, b) = \begin{cases} h \sum_{n=0}^{\infty} [F((n+1)k+a) - F(nk+a+b)] & \text{als } a \equiv r \pmod{h} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

En:

$$(3.8) \quad f(k, a, b+) - f(k, a, b-) = 0 \quad \forall k, a, b.$$

Een andere eigenschap van de funktie f is:

$$(3.9) \quad f(k, a+h, b-h) = f(k, a, b).$$

In het vervolg houden we geen rekening met onderlengtes. We zoeken naar die waarden van k, a en b waarvoor (3.5) minimaal is. Hierbij beperken we k tot de waarden $k \equiv r \pmod{h}$.

4. Optimale knipinstelling voor materiaal rendement.

Bij het bepalen van het minimum van (3.5) moeten k, a en b voldoen aan de beperkingen die de koelbed automatisch oplegt.

Deze bestaan hierin dat iedere staaf op het koelbed kleiner moet zijn dan de lengte van het koelbed l_1 en groter dan een zekere minimum-waarde l_0 . Ook heeft het alleen maar zin een extra knip te geven, wanneer het eindstuk langer dan k is, zodat moet gelden: $a+b > k$.

Onder een beslissing verstaan we een tripel (k, a, b) , dat voldoet aan:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} l_0 &\leq k \leq l_1 \\ l_0 &\leq a \leq k \\ l_0 &\leq b \leq k \\ k &\leq a+b \leq l_1 \end{aligned}$$

Een optimale beslissing is een tripel (k, a, b) , dat voldoet aan (4.1) en (3.5):

$$(4.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk+a}^{nk+a+b} [nR_r(k) + R_r(1-nk)] dF(1) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk+a+b}^{(n+1)k+a} [nR_r(k) + R_r(a) + R_r(1-nk-a)] dF(1)$$

minimaliseert.

De eis dat iedere staaf op het koelbed langer dan het minimum l_0 moet zijn, maakt knippen met de fotocellen op afstanden a en b noodzakelijk. Zonder deze eis zou de verwachte hoeveelheid afval per knuppel bedragen:

$$(4.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk}^{(n+1)k} [nR_r(k) + R_r(1-nk)] dF(1).$$

Dit is een functie van k alleen.

We trekken nu (4.3) af van (4.2) en minimaliseren het verschil eerst bij vaste k over het gedeelte van de (a, b) ruimte dat voldoet aan (4.1).

Door het interval:

$$[nk + a, (n + 1)k + a)$$

op te splitsen in de intervallen:

$$[nk + a, (n + 1)k), [(n + 1)k, nk + a + b), [nk + a + b, (n + 1)k + a)$$

ziet men eenvoudig in dat (4.2) minus (4.3) oplevert:

$$(4.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(n+1)k}^{nk+a+b} [-R_r(k) - R_r(1-(n+1)k) + R_r(1-nk)] dF(1) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk+a+b}^{(n+1)k+a} [-R_r(k) - R_r(1-(n+1)k) + R_r(a) + R_r(1-nk-a)] dF(1).$$

Voor de functie R_r geldt: $R_r(x_1) + R_r(x_2) \geq R_r(x_1 + x_2)$, zodat de integrand van de eerste integraal van (4.4) ≤ 0 is.

De integrand van de tweede integraal van (4.4) is ≥ 0 . Deze integrand is het verschil in afval bij verknipping van $1-nk$ in enerzijds de stukken a en $1-nk-a$ en anderzijds de stukken k en $1-nk-k$.

Door de functie $R_r(\cdot)$ -r te beschouwen en doordat k beperkt is tot die waarden waarvoor $R_r(k) = r$ is, ziet men:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} R_r(a) = r &\Rightarrow 2e \text{ integrand van (4.4)} \equiv 0 \\ R_r(a) = s > r &\Rightarrow \begin{cases} " & " & " & " & > 0 \\ " & " & " & " & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \leq R_r(1-nk) < s + r \\ &\quad \text{elders.} \end{aligned}$$

Het minimum van (4.4) wordt dus bereikt voor een a en b , waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} 1_0 &\leq a \leq k \\ 1_0 &\leq b \leq k \\ a &\equiv r \pmod{h} \\ b &\text{ zo groot mogelijk.} \end{aligned}$$

Om het minimum van (4.2) te bepalen is het voldoende om de roosterpunten (k,a) met $R_r(k) = R_r(a) = r$ af te zoeken, die voldoen aan (4.1). Bij elk punt (k,a) moet voor b de grootste waarde genomen worden die nog voldoet aan (4.1).

5. Machinerendement koudschaar.

Bij sommige produkten wordt de koudschaar bottleneck, wanneer zo weinig walsstoringen optreden, dat de oven lange tijd op volle capaciteit benut wordt. Daarom zoeken we naar die instelling (k,a,b) , waarvoor het machinerendement van de koudschaar het grootst is. Alvorens het machinerendement te definiëren, stellen we de knipmethode van de koudschaar vast:

Er worden uit een koelbedveld zó lang handelslengtes geknipt, totdat er in de reststukken geen gehele handelslengtes meer zitten. We houden daarbij het eenvoudige tijdmodel (t_0, t_1) aan:

- t_0 is een vast tijdsverlies tussen twee koelbedvelden.

- t_1 is de tijd, nodig voor éénmaal knippen en éénmaal doorschuiven.

Deze t_0 en t_1 zijn niet-stochastisch en afhankelijk van de handelslengte en het soort eindprodukt, maar onafhankelijk van k, a en b .

We voeren nog 2 geheelwaardige stochastische grootheden in:

$\underline{0}$ en $\underline{m}$.

- $\underline{0}$ is het aantal gehele handelslengten dat uit een koelbedveld geknipt wordt.

- $\underline{m}$ is het aantal handelslengten dat uit de langste staaf van het koelbedveld geknipt wordt = aantal effectieve knippen per koelbedveld.

Voor koelbedvelden i en $i+1$ zijn $\underline{0}_i$ en $\underline{0}_{i+1}$ en $\underline{m}_i$ en $\underline{m}_{i+1}$ gecorreleerd.

In het ideale geval bestaat het koelbedveld geheel uit oneindig lange staven. Er kan dan achter elkaar doorgeknipt worden en elke knip levert het maximale aantal van N handelslengten op. We noemen dit de ideale opbrengst.

In werkelijkheid treden op twee manieren verliezen op:

a Het koelbedveld heeft een eindige lengte, waardoor het tijdsverlies t_0 optreedt tussen 2 koelbedvelden.

b Het aangevoerde koelbedveld ligt niet vol met staven van dezelfde lengte; sommige zijn korter dan de langste, waardoor de koudschaar niet bij elke knip N handelslengten afknipt.

We vergelijken nu de reële opbrengst van n koelbedvelden, voor de verknipping waarvan een tijd T nodig is, met de ideale opbrengst over dezelfde tijd T .

De n koelbedvelden leveren op:

$$(5.1) \quad \sum_{i=1}^n \underline{O}_i$$

handelslengten. De koudschaar is hiermee bezig gedurende de tijd:

$$(5.2) \quad T = \sum_{i=1}^n (\underline{m}_i t_1 + t_0),$$

en de ideale opbrengst in tijd T bedraagt:

$$(5.3) \quad N \cdot T / t_1 = N \cdot \sum_{i=1}^n (\underline{m}_i t_1 + t_0) / t_1$$

We definiëren nu het koudschaar rendement bij instelling (k, a, b) als de limiet voor $n \rightarrow \infty$ van het quotient van (5.1) en (5.3), waarvoor met kans 1 geldt:

$$(5.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \underline{O}_i}{n \frac{t_0}{t_1} + N \sum_{i=1}^n \underline{m}_i} = \frac{\underline{EO}}{\frac{t_0}{t_1} + N \underline{Em}},$$

zodat voor de criteriumfunctie $r(k, a, b)$ geldt:

$$(5.5) \quad r(k, a, b) = \frac{\underline{EO}}{\frac{t_0}{t_1} + N \underline{Em}} = \frac{\underline{Ex}}{\frac{t_0}{t_1} + \underline{Em}}$$

Hierin is $\underline{x}$ een geheelwaardige stochastische grootte, die het aantal gehele handelslengten aangeeft in een staaf op het koelbed. De verdeling van $\underline{x}$ kan in principe uit de verdelingsfunctie $F(1)$ van de uitgewalste lengte bepaald worden.

De verdeling van $\underline{m}$ is veel moeilijker te bepalen. We mogen niet stellen:

$$\underline{m} = \max_{1 \leq i \leq N} \underline{x}_i,$$

met $\underline{x}_i$ onderling onafhankelijk en verdeeld volgens $\underline{x}$.

Want op het koelbed liggen de staven in een zekere regelmaat: eerst een aantal gehele lengtes uit één knuppel, gevolgd door één of twee staven van afwijkende lengte uit de staart van de knuppel. Een koelbedveld bestaat uit een greep van N opeenvolgende staven op het koelbed; op de eerste plaats zal meestal niet de eerste staaf uit een knuppel liggen. Dit alles maakt het noodzakelijk zijn toevlucht te nemen tot een benadering van $r(k,a,b)$ met een eindig aantal koelbedvelden. Dit doen wij met een vaste serie trekkingen uit de verdeling van de uitgewalste lengte, die voor alle (k,a,b) gebruikt wordt. Het rendement wordt aldus benaderd door:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \underline{O}_i}{n \cdot N \frac{t_0}{t_1} + N \sum_{i=1}^n \underline{m}_i} \approx r(k,a,b).$$

Evenals bij de bepaling van het materiaalrendement, wordt eerst bij vaste k en a de optimale b gevonden, waarna, door variatie van k en a over alle in aanmerking komende waarden, het absolute optimum gevonden wordt. Daarbij beperken we k en a ook tot die waarden, waarvoor de hoeveelheid afval minimaal is, dus tot $k \equiv r \pmod{h}$ en $a \equiv r \pmod{h}$.

Bij het benaderen van de funktie

$$r(k,a,b) = \frac{\underline{Ex}}{c + \underline{Em}}$$

op equidistante punten b voor diverse waarden van k en a , deden de eerste resultaten vermoeden, dat de funktie $r(k,a,b)$ een unimodale funktie van b is. Dit resultaat zou het zoeken van de optimale b bij vaste k en a aanzienlijk versnellen. Deze unimodaliteit kon echter niet bewezen worden. Wel ziet men door het interval $[nk+a+b, nk+a+b+\Delta b)$ te beschouwen, dat bij een vergroting van b met Δb zowel $\underline{Ex}$ als $\underline{Em}$ monotoon stijgen, maar daaruit volgt de unimodaliteit niet zonder meer. Een voordeel van het afzoeken van equidistante punten b is dat een beter overzicht verkregen wordt van het rendementsverlies dat optreedt, wanneer een andere dan de optimale instelling gebruikt wordt.

Ook voor de optimale instelling voor het machinerendement geldt:

$a \equiv r \pmod{h}$. Voor de funktie $r(k,a,b)$ geldt namelijk:

$$(5.6) \quad r(k, a + \varepsilon, b - \varepsilon) < r(k, a, b), \text{ als } mh + r \leq a < a + \varepsilon < (m+1)h + r.$$

Dit ziet men in door de instellingen:

$$(k, a + \varepsilon, b - \varepsilon) \text{ en } (k, a, b)$$

te vergelijken. Bij beide treden voor precies dezelfde uitgewalste lengtes knipvergrendeling en extra knip op. Dit betekent dat $\underline{m}$ bij deze beide instellingen dezelfde verdeling heeft. Bij de instelling $(k, a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ zal bij sommige uitgewalste lengtes bij de extra knip één handelslengte minder ontstaan dan bij de tweede instelling, zodat daarvoor $\underline{Ex}$ kleiner is.

Uit bovenstaande volgt ook nog:

$$(5.7) \quad \frac{r(k, a + \varepsilon, b - \varepsilon)}{1-f(k, a + \varepsilon, b - \varepsilon)} = \frac{r(k, a, b)}{1-f(k, a, b)},$$

omdat het machinerendementsverlies geheel bepaald wordt door het verlies in opbrengst.

Ook geldt voor de funktie r :

$$(5.8) \quad r(k, a + h, b - h) = r(k, a, b),$$

wanneer $(k, a + h, b - h)$ en (k, a, b) voldoen aan (4.1).

6. Resultaten.

A. Materiaalrendement.

Voor elk eindprodukt geldt, dat het optimum van:

$$(6.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk+a}^{nk+a+b} [nR_r(k) + R_r(1-nk)] dF(1) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nk+a+b}^{(n+1)k+a} [nR_r(k) + R_r(1-nk-a) + R_r(a)] dF(1)$$

bereikt wordt voor een k, a en b die voldoen aan:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} l_0 &\leq k \leq l_1 \\ l_0 &\leq a \leq k \\ l_0 &\leq b \leq k \\ k &\equiv r \pmod{h} \\ a &\equiv r \pmod{h} \\ b &= \min(k, l_1 - a) \end{aligned}$$

Bij vaste k en a blijkt het materiaalverlies vrijwel onafhankelijk van b te zijn. Over stukken van lengte $h-r$ is de funktie (6.1) zelfs konstant in b , zoals men gemakkelijk kan bewijzen. Het enige verschil is gelegen in het feit dat bij kleine b een stuk dat in tweeën geknipt wordt, juist een fraktie r of minder te kort kan komen om nog een extra handelslengte op te leveren. Een grotere b , dus knipvergrendeling, levert deze extra handelslengte wel op. De gevoeligheid in a op waarden $a \equiv r \pmod{h}$ bij vaste k speelt zich op hetzelfde vlak af en is uiterst gering.

Aanmerkelijk gevoeliger is $f(k, a, b)$, wanneer a niet meer tot de waarden $a \equiv r \pmod{h}$ beperkt wordt. Zie tabel V. De resultaten bevestigen de juistheid van formule (5.7).

De grootste variaties in $f(k, a, b)$ over (6.2) treden op wanneer k de waarden $r \pmod{h}$ doorloopt.

Grote waarden zijn beter dan kleine, omdat bij grote k minder vaak een verlies r genomen wordt.

De funktie f blijkt zeer sterk toe te nemen wanneer k niet meer tot $r(\text{mod } h)$ beperkt blijft. Zie tabel VI.

B. Machinerendement.

De funktie $r(k,a,b)$ wordt benaderd door:

$$(6.3) \quad \hat{r}(k,a,b) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{0_i}{t_0}}{nN \frac{t_0}{t_1} + N \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{t_1}} .$$

Hierbij moeten k, a en b voldoen aan:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} l_0 &\leq k \leq l_1 \\ l_0 &\leq a \leq k \\ l_0 &\leq b \leq k \\ k &\leq a+b \leq l_1 \\ k &\equiv r(\text{mod } h) \\ a &\equiv r(\text{mod } h) \end{aligned}$$

Bij een k en a die voldoen aan deze voorwaarden is het toegelaten interval voor b :

$$(6.5) \quad I_b = [\max(l_0, k-a), \min(k, l_1-a)] .$$

De uitkomsten voor 80^2 knuppels dringen de volgende konklusie op: voor elke (k,a) instelling is $b^* = k + h - a$ optimaal, mits $b^* \in I_b$. Als $b^* \notin I_b$, is die $\hat{b} \in I_b$ optimaal, waarvoor $|b^* - \hat{b}|$ minimaal is. Voor produkten uit 100^2 knuppels gaat deze regel echter niet meer op; voor de zwaarste eindprodukten geldt b.v. dat bij elke (k,a) instelling de grootste $b \in I_b$ optimaal is. Tevens is voor sommige van deze zware eindprodukten de funktie $\hat{r}(k,a,b)$ alleen afhankelijk van k , terwijl voor andere de afhankelijkheid van a en b bij vaste k juist bijzonder groot is.

De berekening van $\hat{r}(k,a,b)$ geschiedt met een vaste serie van 500 knuppels getrokken uit de knuppelgewichtsverdeling. Vergelijking van 5 series van 500 knuppels laat zien, dat er nog wel enige schommeling in de funktie zit, die echter niet groter dan 4 in het derde significante getal, dus < 1% is. Bij alle onderzochte instellingen voor (k,a) werd het maximum van $\hat{r}$ over I_b aangenomen voor een b die in alle series dezelfde was. We concluderen daaruit dat een serie van 500 trekkingen uit de knuppelgewichtsverdeling voldoende groot is, om de optimale knipinstelling te bepalen.

C. Resultaten.

De resultaten hebben betrekking op het ronde eindprodukt (glad), met handelslengte $h = 12$ en $h = 14$ meter, voor verschillende treksterkten en op hoeklijn. De treksterkte bepaalt de breedte van het koelbedveld. Tabel I geeft de onderzochte eindprodukten. De dunne eindprodukten worden gemaakt uit 80^2 knuppels en de dikke uit 100^2 knuppels. Voor beide verdelingen werden de grafieken van Palthe ("knuppelgewichtsverdelingen", 15-7-'68) gebruikt. Ook voor het tijdmodel (t_0, t_1) van de koudschaar werden zijn getallen $(212, 45 + .6h)$ gebruikt. Als beperkingen van het koelbed namen wij: maximale lengte $l_1 = 121$ meter, minimale lengte $l_0 = 44$ meter, en voor r steeds .45 meter.

Bij elk produkt uit tabel I zijn de funkties (6.1) en (6.3) uitgerekend, voor elke knipinstelling (k,a,b) , die voldoet aan (6.4) en waarbij b beperkt is tot gehele meters. Dit zijn per produkt 222 instelmogelijkheden.

Tabel II geeft voor $h = 12$ de resultaten voor produkten uit 80^2 knuppels, Tabel III voor 100^2 knuppels. De cijfers bij verschillende treksterkten wijken nauwelijks van elkaar af, en zijn voor de meeste (k,a,b) , en in ieder geval voor de optimale of bijna optimale, exact aan elkaar gelijk. Om het verloop van de funktie $\hat{r}$ te zien, wordt niet alleen de optimale instelling gegeven. Een sterretje duidt het optimum aan. Altijd is méér dan één instelling optimaal. Er geldt immers (5.8): $r(k, a + h, b - h) = r(k, a, b)$ en (3.9): $f(k, a + h, b - h) = f(k, a, b)$.

Soms is de funktie $\hat{r}(k,a,b)$ bij een bepaalde k en a konstant in b , maar voor een ander produkt zeer sterk afhankelijk van b . De grote verschillen in $\hat{r}$ voor b.v. metergewicht 7.86 en 9.67 kunnen verklaard worden uit de geringe spreiding van de knuppelgewichtsverdeling. Bij rond 36($G = 7.86$) kan voor alle b nog een extra knip optreden, bij rond 40($G = 9.67$) treedt knipvergrendeling op voor alle b . (zie Tabel IV). Ook voor $h = 14$ werden voor alle instelmogelijkheden (k,a,b) de funkties f en $\hat{r}$ berekend, doch alleen voor produkten uit 100^2 knuppels. Tabel VII geeft de voornaamste resultaten.

De resultaten voor $h = 12$ en $h = 14$ pleiten sterk voor de verplaatsbaarheid van de 2 fotocellen op afstanden a en b .

Voor $h = 14$ is $a = b = 56$ b.v. dikwijls een goede instelling.

Voor $h = 12$ geldt echter (5.6):

$$r(k,56,56) = \frac{1-f(k,56,56)}{1-f(k,48,64)} \cdot r(k,48,64)$$

Aangezien $f(k,56,56) \geq f(k,48,64)$ zal dus $r(k,56,56) \leq r(k,48,64)$ zijn, terwijl deze laatste instelling van a en b niet eens optimaal voor $h = 12$ behoeft te zijn.

Wanneer ook nog andere handelslengten in de beschouwing betrokken worden, wordt de kans dat één instelling voor a en b voor alle handelslengten optimaal is nog kleiner.

Enkele resultaten voor hoeklijn, laten ook een sterke afhankelijkheid van de funktie $\hat{r}$ van a en b zien. Aangezien van de kant van het bedrijf de zekerheid bestaat dat de koudscharen hier produktie- bepalend zijn, valt extra veel nadruk op de optimalisering m.b.t. het koudschaarrendement. Tabel VIII geeft resultaten voor $h = 6.10$. Door de relatief kleine tijd, die tussen twee koelbedvelden nodig is, zijn de resultaten voor verschillende treksterkten nu enigszins anders. Wel wordt bij verschillende N voor dezelfde k,a,b het maximum aangenomen.

D. Conclusie.

Samenvattend komen we tot de volgende optimale instelling:

A. Voor materiaal rendement $f(k,a,b)$:

$$k = \text{entier } ((l_1 - r)/h)$$

$$a \equiv r \pmod{h}$$

$$b = l_1 - a$$

B. Voor alle onderzochte eindprodukten treedt het maximum van $\hat{r}(k,a,b)$ bij vaste (k,a) op, in een b waarvoor geldt: $b \equiv r \pmod{h}$ of op de rand van het interval I_b , zodat de optimale instelling voor $\hat{r}(k,a,b)$ voldoet aan:

$$k \equiv r \pmod{h}$$

$$a \equiv r \pmod{h}$$

$$b \begin{cases} \equiv r \pmod{h} \\ = \max(l_0, k-a) \\ = \min(k, l_1 - a) \end{cases}$$

De optimale instelling kan het best door nazoeken van deze punten bepaald worden. Voor dunne eindprodukten is de onder A gevonden instelling ook onder B optimaal. Voor dikke eindprodukten hangt zeer veel af van de knuppelgewichtsverdeling en de waarden van het tijdmodel.

De functie r kan erg variëren in a en b , zodat het verplaatsbaar opstellen van de 2^e rest fotocel en de 60-meter fotocel aangeraden wordt.

E. Een nieuw probleem.

Een combinatie van de optimalisering over machine- en materiaalrendement zou tot het volgende ingewikkelde probleem kunnen leiden. De capaciteit van de oven is 100 ton/uur. Deze produktie wordt door twee koelbedden en koudscharen verwerkt, dus per koelbed en per koudschaar 50 ton/uur. Het koelbed werkt als buffer: de aanvoer zal bij voluit draaiende walsstraat 50 ton/uur bedragen, totdat er een walsstoring optreedt. De capaciteit van de koudschaar kan op eenvoudige wijze uit de functies r en f berekend worden. De doorzet per uur van het "ideale koelbedveld" (bestaande uit ∞ -lange staven) bedraagt:

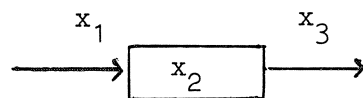
$$M = \frac{6}{t_1} \cdot h \cdot G \cdot N \text{ ton.}$$

Hierin is t_1 de tijd in cm, die nodig is voor het knippen en doorschuiven van één schaarveld, h de handelslengte in meters, G het metergewicht in kg en N het aantal staven dat tegelijk geknipt wordt. De bruto doorzet in tonnen per uur bij instelling (k,a,b) bedraagt nu:

$$(6.6) \quad d(k,a,b) = \frac{r(k,a,b)}{1-f(k,a,b)} \cdot M$$

Instellingen waarvoor $d(k,a,b) \geq 50$ geven dus nooit opstoppen bij de koudschaar, zodat daarvoor alleen op het materiaalrendement gelet hoeft te worden. Als echter $d(k,a,b) < 50$ is, kan, wanneer de walsstraat lange tijd op ovenkapaciteit draait, het koelbed volraken, zodat de aanvoersnelheid verminderd moet worden.

Het volgende eenvoudige model beschrijft deze situatie:



Een konstante aanvoersnelheid x_1 , een buffercapaciteit x_2 en konstante afvoersnelheid x_3 met $x_1 > x_3$. Op stochastische tijdstippen wordt de aanvoer gedurende een stochastische periode onderbroken. Dan loopt de buffer met snelheid x_3 leeg.

Tijdens aanvoer loopt de buffer met snelheid x_1 - x_3 vol. Als de buffer vol is, wordt de aanvoersnelheid x_1 teruggebracht tot x_3 . Als de buffer leeg is, is $x_3 = 0$.

Elke instelling (k,a,b) heeft zijn eigen afvoersnelheid $d(k,a,b)$ en winst $c(k,a,b)$ per tijdseenheid, die uit de funkties f en r bepaald kunnen worden. Wanneer $x_3 = 0$, is ook $c = 0$.

Het probleem is nu om de verwachte winst per tijdseenheid, te maximaliseren over alle instelmogelijkheden (k,a,b) .

Dat dit gestelde probleem realistisch is, moge Tabel IX verduidelijken.

In de tabel staan de getallen $50/M$ voor diverse koelbedbreedtes en metergewichten voor rond en hoeklijn. De getallen geven het percentage bruto koudschaarrendement dat nodig is opdat de koudschaar precies 50 ton/uur verwerkt. Wanneer bij een instelling (k,a,b) het bruto rendement $(= r/(1-f))$ groter is dan $50/M$, kan het bovenstaande bufferprobleem nooit optreden. Is echter $r/(1-f) < 50/M$, dan wordt het bufferprobleem actueel. Voor hoeklijn is het bufferprobleem zeker actueel, maar ook voor grote treksterkten bij rond eindprodukt.

Tabel I Produkten en breedtes koelbedveld (treksterkte), waarvoor optimalisatie van (6.1) en (6.3) uitgevoerd is.

Alle eindprodukten zijn rond, glad met handelslengte 12.

Maat	Metergewicht G	Breedte (N)			Knuppel
10	.6	80	76	59	80 ²
12	.86	67	53	41	80 ²
14	1.17	57	39	30	80 ²
16	1.54	46	30	23	80 ²
18	1.95	37	23	18	80 ²
18	1.95	37	18		
19	2.18	33	16		100 ²
20	2.42	29	15		100 ²
22	2.91	25	12		100 ²
24	3.48	21	10		100 ²
25	3.78	19	9		100 ²
26	4.08	18	8		100 ²
28	4.74	15	8		100 ²
32	6.17	12	6		100 ²
36	7.86	10	4		100 ²
40	9.67	8	4		100 ²

Tabel II Optimale instellingen voor 80^2 knuppels.

G(maat)	k-.45	a-.45	6	f(k,a,b)	$\hat{r}(k,a,b)$.
.6(10)	120	48	72	1.02 *	67.2 *
	108	48	72	1.06	66.4
.86(12)	120	48	72	1.29 *	65.2 *
	108	48	72	1.34	64.0
1.17(14)	120	48	72	1.68 *	59.7
	108	$\forall a$	$\forall b$	1.68 *	61.7
	96	48	60	1.74	62.2 *
1.54(16)	120	48	72	2.05 *	54.5
	108	$\forall a$	$\forall b$	2.05 *	58.3
	96	48	56-72	2.05 *	63.2 *
	84	48	56	2.17	55.1
1.95(18)	120	48	72	2.39 *	56.8
	108	$\forall a$	$\forall b$	2.39 *	61.2
	96	48	60	2.46	62.1
	96	48	48	2.58	52.5

Tabel III. Optimale instelling voor $h = 12$; 100^2 knuppels.

G(maat)	k-.45	a-.45	b	f(k,a,b)	$\hat{r}(k,a,b)$
1.95(18)	120	48	72	1.71 *	65.3 *
	108	48	72	1.79	62.6
	108	48	60	1.79	56.3
	96	$\forall a$	$\forall b$	1.79	60.9
2.18(19)	120	48	72	1.96 *	58.3
	108	$\forall a$	$\forall b$	1.96 *	62.7 *
	96	48	72	1.99	60.5
2.42(19)	120	48	72	2.11 *	61.9 *
	108	$\forall a$	$\forall b$	2.13	56.4
	96	48	52-72	2.13	61.1
2.91(22)	120	48	72	2.42 *	57.9
	108	$\forall a$	$\forall b$	2.42 *	62.3 *
	96	48	72	2.43	60.8
	96	48	48	2.52	50.6
3.48(24)	120	48	72	2.88 *	48.1
	108	$\forall a$	$\forall b$	2.88 *	51.8
	96	$\forall a$	$\forall b$	2.88 *	56.1
	84	48	48	2.93	60.0 *
	72	48	48	3.02	50.4
3.78(25)	120	48	72	3.12 *	63.3 *
	108	48	72	3.30	55.3
	108	48	68	3.30	47.7
	96	$\forall a$	$\forall b$	3.30	51.5
	84	$\forall a$	$\forall b$	3.30	56.2

Tabel III (vervolg).

G(maat)	k-.45	a-.45	b	f(k,a,b)	$\hat{r}(k,a,b)$
4.08(26)	120	48	72	3.45 *	61.3
	108	48	72	3.48	65.3 *
	108	48	60	3.60	59.7
	96	48	72	3.60	59.7
4.74(28)	120	48	72	3.26 *	52.9
	108	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	3.26 *	57.0
	96	48	54-72	3.26 *	61.7 *
	84	48	44	3.66	44.7
	84	48	66	3.26	59.5
6.17(32)	120	48	72	5.55 *	39.7
	108	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	5.55 *	42.7
	96	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	5.55 *	46.2
	84	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	5.55 *	50.4
	72	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	5.55 *	55.4 *
	60	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	5.55 *	52.0
7.86(36)	120	48	72	3.91 *	63.5
	108	48	72	3.91 *	68.4 *
	108	48	60	4.80	35.1
	96	48	72	3.91 *	68.4 *
	96	48	58	4.80	37.0
	84	48	72	3.91 *	68.4 *
	84	48	59	4.80	40.0
	72	48	72	3.91 *	68.4 *
	60	48	60	4.80	46.3
	60	60	60	3.91 *	68.4 *
9.67(40)	120	48	72	7.08 *	50.0
	108	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	7.08 *	53.7
	96	48	49-72	7.08 *	58.2
	84	48	48-72	7.08 *	62.6 *
	72	48	49-72	7.08 *	62.6 *
	60	48	49-60	7.08 *	62.6 *

Tabel IV $\hat{r}$ (108.45, 48.45, b) voor rond 36 en rond 40

b	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
$G = 7.86$ (36)	35.1	39.9	45.1	51.0	56.1	59.2	61.0	62.1	62.6	63.9	66.7	68.0	68.3
$G = 9.67$ (40)	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7

Tabel V Een voorbeeld van de variatie van f en r, wanneer a niet meer tot $r \pmod{h}$ beperkt is. (Formule 5.7)

$G = 1.17$; $k = 96.45$; $r = .45$;

a	b	$k=96.45$ $f(k,a,b)$	$k=96.45$ $\hat{r}(k,a,b)$
48.45	60	1.74	
49	60	1.77	61.5
50	59	1.89	61.4
51	58	1.99	61.4
52	57	2.08	61.3
53	56	2.17	61.3
54	55	2.25	61.2
55	54	2.32	61.2
56	53	2.40	61.1
57	52	2.46	61.1

Tabel VI Een voorbeeld van de variatie van f, wanneer k niet meer tot $r \pmod{h}$ beperkt is.

$G = .6$; $a = 48.45$; $b = 72$; $r = .45$;

k	$f(k,48.45,72)$	$\hat{r}(k,48.45,72)$
108.45	1.06	
109	1.51	66.5
110	2.33	66.3
111	3.11	65.9

Vervolg Tabel VI

k	f(48.45,72)	$\hat{r}(k,48.45,72)$
112	3.87	65.4
113	4.60	64.9
114	5.33	64.5
115	6.05	64.1
116	6.75	64.0
117	7.42	64.4
118	8.06	64.9
119	8.74	65.5

Tabel VII Optimale instelling voor $h = 14$; 100^2 knuppels.

G(maat)	k-.45	a-.45	b	f(k,a,b)	$\hat{r}(k,a,b)$
1.95 (18)	112	56	64	1.91 *	63.2 *
	98	$\forall a$	$\forall b$	1.99	57.2
	112	56	56	1.96	60.8
2.18 (19)	112	$\forall a$	$\forall b$	2.18 *	58.6
	98	56	56	2.23	61.1 *
	98	56	64	2.20	59.6
	84	$\forall a$	$\forall b$	2.32	56.2
2.42 (20)	112	$\forall a$	$\forall b$	2.19 *	52.7
	98	$\forall a$	$\forall b$	2.19 *	57.5 *
	84	56	56	2.26	54.7
2.91 (22)	112	$\forall a$	$\forall b$	2.87 *	58.1
	98	56	56	2.90	60.9 *
	98	56	64	2.87	60.2
	84	$\forall a$	$\forall b$	3.05	52.2

Vervolg Tabel VII

G(maat)	k-.45	a-.45	b	f(k,a,b)	$\hat{r}(k,a,b)$
3.48 (24)	112	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	3.60 *	48.1
	98	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	3.60 *	52.5
	84	56	45	3.60 *	56.8 *
	84	56	56	3.60 *	56.7
3.78 (25)	112	56	64	2.86 *	59.3 *
	112	56	56	3.01	45.2
	98	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	3.01	48.8
	84	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	3.01	53.7
4.08 (26)	112	56	64	3.42 *	61.8 *
	112	56	56	3.45	59.1
	98	56	64	3.45	57.3
	98	56	56	3.45	49.7
4.74 (28)	112	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	4.65 *	52.5
	98	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	4.65 *	57.3 *
	84	56	58-64	4.65 *	56.5
6.17 (32)	112	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	6.07 *	39.6
	98	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	6.07 *	43.2
	84	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	6.07 *	47.6
	70	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	6.07 *	52.9 *
7.86 (36)	112,98	56	64	8.57 *	60.3 *
	84,				
	112,98	56	56	9.09	49.3
9.67 (40)	84				
	112	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	7.30 *	50.1
	98	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	7.30 *	54.7
	84,70	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	7.30 *	60.2 *

Tabel VIII. Enkele resultaten voor hoeklijn.

$h = 6.1$ $t_0 = 236$ $t_1 = 53.74$ $r = .45$

G	k	a	b	f	$\hat{r}$
4.24	104.15	43.15	61	2.05	68.7
			62	1.98 *	70.4
			63	1.98 *	71.3
			64	1.98 *	72.1
			65	1.98 *	72.9
			66	1.98 *	73.4 *
	98.05	37.05	69	2.05	60.5
			70	2.05	62.7
			71	2.05	65.1
			72	2.05	67.0
6.93 N = 10	104.15	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	2.91	47.0
	98.05	"	"	2.91	49.3
	91.95	"	"	2.91	51.8
	85.85	"	"	2.91	54.7
	79.75	"	"	2.91	57.8
	73.65	"	"	2.91	61.3
	67.53	"	"	2.91	65.3
	61.45	"	"	2.91	66.9 *
	55.35	"	"	2.91	62.7
6.93 N = 5	104.15	"	"	"	47.0
	98.05	"	"	"	49.3
	91.95	"	"	"	51.8
	85.85	"	"	"	54.7
	79.75	"	"	"	57.8
	73.65	"	"	"	61.3
	67.55	"	"	"	65.3
	61.45	"	"	"	68.1 *
	55.35	"	"	"	63.7

Tabel IX Kritieke waarden 50/M voor het machinerendement van de koudschaar, bij rond ($h=12$) en hoeklijn ($h=6.1$). N_1 is de grootste breedte, N_2 een middenmaat, N_3 de kleinste. Zie Tabel I.

Maat	T_1	T_2	T_3
rond 10	75.5	79.5	102.3
12	62.9	79.5	102.8
14	54.4	79.4	103.3
16	51.2	78.5	102.3
18	50.3	80.8	103.3
19	50.4		104.0
20	51.7		99.9
22	49.8		103.8
24	49.6		104.2
25	50.5		106.6
26	49.4		111.1
28	50.9		95.6
32	49.0		97.9
36	46.1		115.3
40	46.9		93.7
Hoeklijn $G=4.24$	133.2	157.4	216.5
$G=6.93$	106.0	132.5	211.9